



Control 2

Pregunta 1.

a) Calcule las siguientes integrales:

i) [2ptos] $\int \frac{x^3 + 2}{x^3 + x^2} dx$

ii) [2ptos] $\int \frac{1 + \cosh(x)}{\sinh^2(x)} dx$

b) [2ptos] Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i 2^{\frac{i}{n}} \right)$

Pregunta 2.

a) [3ptos] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2(\mathbb{R})$ con $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Demuestre que si $G(x) = \int_x^{x+1} (x-t)f(t)dt$, entonces $G''(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$$

i) [1ptos] Para la partición $P = \{0, 7/8, 1, 9/8, 2\}$ calcule la suma inferior $s(f, P)$ y la suma superior $S(f, P)$.

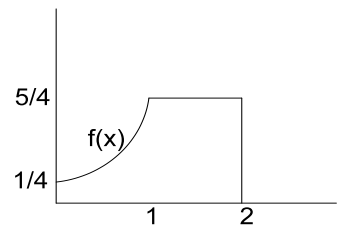
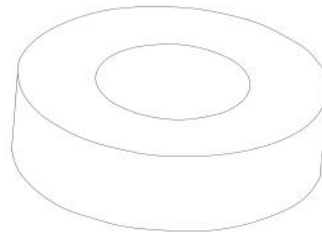
ii) [2ptos] Encuentre una partición $P_\epsilon \in \mathcal{P}_{[0,2]}$ tal que para todo $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$ se cumple $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.

Pregunta 3.

a) [3ptos] Dadas las parábolas $C_1 : y^2 = 4 - x$ y $C_2 : y^2 = x$. Considere las regiones R_1, R_2 del primer cuadrante definidas por:

R_1 : área plana entre C_1, C_2 y el eje OY . R_2 : área plana entre C_2, C_1 y el eje OX .

Demuestre que los volúmenes de los sólidos generados por la rotación de ambas regiones con respecto a al eje OX son iguales. Calcule dichos volúmenes.



b) [3ptos] Una empresa quiere fabricar jaboneras con la forma que se muestra en la figura.

Un ingeniero modela un corte de la jabonera con las siguientes funciones, $f(x) = x^m + 1/4$ e $y = 5/4$. Le solicitan que la base sea circular de radio $2cm$ y que su volumen sea de $\frac{22}{5}\pi$. Calcular cuál es el $m \in \mathbb{R}^+$ adecuado para obtener el volumen solicitado como sólido de rotación de las funciones propuestas.

Prueba Problema 1

a) i) $I = \int \frac{x^3+2}{x^3+x^2} dx$ dividiendo los polinomios o ajustando se tiene

$$I = \int \frac{x^3+x^2 \cdot x^2+2}{x^3+x^2} dx = \int \left[1 - \frac{x^2-2}{x^2(x+1)} \right] dx = x - \int \frac{x^2-2}{x^2(x+1)} dx$$

Fracciones parciales para $\frac{x^2-2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x^2+x) + Cx^2}{x^2(x+1)}$

(1.0) \Rightarrow $\begin{matrix} \text{coef } x^2: B+C=1 \\ \text{coef } x: A+B=0 \\ \text{cte: } A=-2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A=-2 \\ B=2 \\ C=-1 \end{matrix} \Rightarrow I = x - \int \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$

(1.0) $\Rightarrow I = x - \frac{2}{x} - 2 \ln|x| + \ln|x+1| + C = x - \frac{2}{x} + \ln \frac{|x+1|}{x^2} + C$

ii) $I = \int \frac{1 + \cosh(x)}{\sinh^2(x)} dx$ Se puede usar $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1 + \cosh(x)}{\sinh^2(x) - 1} dx = \int \frac{1 + \cosh(x)}{(\cosh^2(x) + 1)(\cosh(x) - 1)} dx = \int \frac{dx}{\cosh(x) - 1}$$

(0.5) \Rightarrow con $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow I = \int \frac{dx}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1} = 2 \int \frac{dx}{e^x + e^{-x} - 2}$

Sustitución $u = e^x$, $du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$

Así $I = 2 \int \frac{\frac{du}{u}}{u + u^{-1} - 2} = 2 \int \frac{du}{u^2 - 2u + 1} = 2 \int \frac{du}{(u-1)^2} = -\frac{2}{u-1} + C$

(1.5) \Rightarrow Sigue que $I = \int \frac{\cosh(x) + 1}{\sinh^2(x)} dx = -\frac{2}{e^x - 1} + C$

OTRA FORMA: Reducir desde el inicio las hiperbólicas a exponenciales

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i 2^{i/n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} 2^{i/n} \cdot \frac{1}{n}$ de donde $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow b-a=1$
 $xi = a + \frac{i}{n} = \frac{i}{n} \Rightarrow a=0, b=1$
 y $f(x) = x 2^x$

(1.0) \Rightarrow Sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} 2^{i/n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x 2^x dx$

donde $I = \int_0^1 x 2^x = \int_0^1 x e^{x \ln 2} dx = \frac{x}{\ln 2} e^{x \ln 2} \Big|_0^1 - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 e^{x \ln 2} dx = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2} e^{x \ln 2} \Big|_0^1$
 Partes $\begin{cases} du = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{x \ln 2} \rightarrow v = \frac{1}{\ln 2} e^{x \ln 2} \end{cases} I = \frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{(\ln 2)^2} + \frac{1}{(\ln 2)^2} = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2}$

Punto Problema 2

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ en $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demostrar que si

$G(x) = \int_x^{x+1} (x-t)f(t)dt$, entonces $G''(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (G es cóncavo en \mathbb{R})

Calculamos $G'(x)$ para lo cual $G(x) = \int_x^{x+1} (x-t)f(t)dt = x \int_x^{x+1} f(t)dt - \int_x^{x+1} tf(t)dt$

Así $G'(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt + x(f(x+1) - f(x)) - (x+1)f(x+1) + xf(x)$ (PNTFC)

$$\textcircled{1.0} \rightarrow = \int_x^{x+1} f(t)dt + x f(x+1) - x f(x) - x f(x+1) - f(x+1) + x f(x)$$

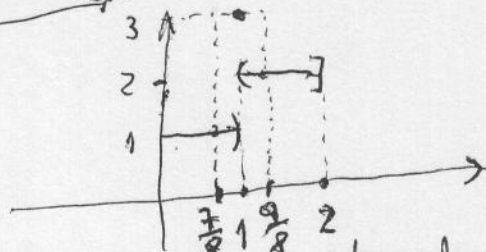
Así $G''(x) = f(x+1) - f(x) - f'(x+1)$ y como f es continua en $[x, x+1]$ y derivable en $(x, x+1)$, por TVM (para derivadas) $\exists \xi \in (x, x+1)$ tal que

$$\textcircled{1.0} \rightarrow f(x+1) - f(x) = f'(\xi)(x+1-x) \Rightarrow f(x+1) - f(x) = f'(\xi)$$

Como $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f'$ es creciente y $\xi \in (x, x+1) \Rightarrow f'(\xi) < f'(x+1)$

Segue que $G''(x) = f(x+1) - f(x) - f'(x+1) = f'(\xi) - f'(x+1) < 0$

$\textcircled{1.0} \rightarrow$ Así $G''(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.



b) i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$

Para $P = \{0, \frac{7}{8}, 1, \frac{9}{8}, 2\}$ Es fácil determinar en cada intervalo m_i y M_i

$\textcircled{0.5} \rightarrow$ Así $\Delta f(P) = \sum_{i=1}^4 m_i \Delta x_i = 1(\frac{7}{8}-0) + 1(1-\frac{7}{8}) + 2(\frac{9}{8}-1) + 2(2-\frac{9}{8}) = 3 = \frac{24}{8}$

$\textcircled{0.5} \rightarrow$ Así $S(f, P) = \sum_{i=1}^4 M_i \Delta x_i = 1(\frac{7}{8}-0) + 3(1-\frac{7}{8}) + 3(\frac{9}{8}-1) + 2(2-\frac{9}{8}) = 3\frac{3}{8} = \frac{27}{8}$

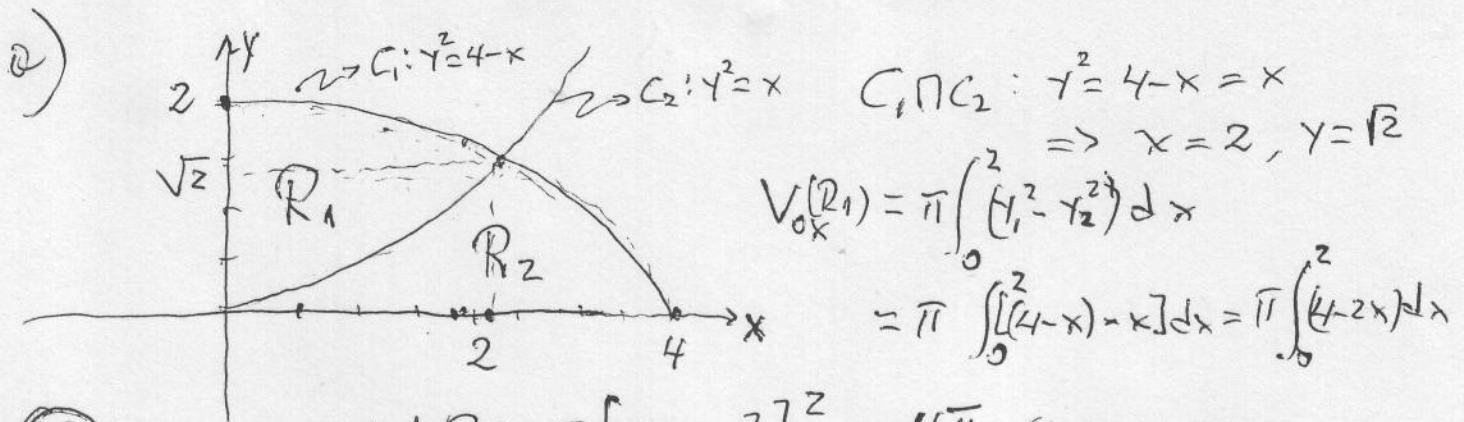
ii) Podemos suponer, como en el caso (i), una partición de la forma $P = \{0, 1-\delta, 1, 1+\delta, 2\}$ y determinar δ positivo e $0 < \delta < 1$

$\textcircled{0.5} \rightarrow$ Así $\Delta f(P) = 1 \cdot (1-\delta) + 1 \cdot (1-(1-\delta)) + 2 \cdot (1+\delta-1) + 2 \cdot (2-(1+\delta)) = 1-\delta + \delta + 2\delta + 2-2\delta = 3$

$S(f, P) = 1(1-\delta) + 3(1-(1-\delta)) + 3(1+\delta-1) + 2(2-(1+\delta)) = 1-\delta + 3\delta + 3\delta + 2-2\delta = 3\delta + 3$

$\textcircled{1.5} \rightarrow$ Sigue que $S - \Delta = (3\delta + 3) - 3 = 3\delta$ de modo que $S - \Delta < \varepsilon$ si $3\delta < \varepsilon$, $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$
 $\Rightarrow P = \{0, 1-\frac{\varepsilon}{3}, 1, 1+\frac{\varepsilon}{3}, 2\} \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$

Penta Problema 3



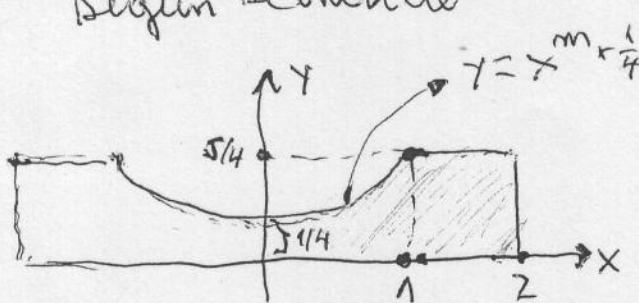
1.0 $\Rightarrow V_{OX}(R_1) = \pi [4x - x^2]_0^2 = 4\pi //$

$V_{OX}(R_2) = \pi \int_0^2 y_2^2 dx + \pi \int_2^4 y_2^2 dx = \pi \int_0^2 x dx + \int_2^4 (4-x) dx$

$\Rightarrow V_{OX}(R_2) = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 + \pi \left[4x - \frac{1}{2} x^2 \right]_2^4 = 2\pi + \pi [8 - 6] = 4\pi$

2.0 \Rightarrow An $V_{OX}(R_1) = V_{OX}(R_2) = 4\pi$.

b) Según la figura de la jabonera, un corte central quila según se indica



Así, la jabonera se generará por la rotación de la región achurada en torno al eje OY

1.0 \Rightarrow An $V_{OY} = 2\pi \int_0^1 x(x^{m+1/4}) dx + 2\pi \int_1^2 x \frac{5}{4} dx = 2\pi \int_0^1 (x^{m+1/4} + \frac{1}{4} x) dx + 2\pi \int_1^2 \frac{5}{4} x dx$

$= 2\pi \left[\frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^2}{8} \right]_0^1 + 2\pi \left[\frac{5}{8} x^2 \right]_1^2 = 2\pi \left[\frac{1}{m+2} + \frac{1}{8} + \frac{20}{8} - \frac{5}{8} \right]$

1.5 $\Rightarrow V_{OY} = 2\pi \left[\frac{1}{m+2} + 2 \right]$ y es necesario que $V_{OY} = \frac{22}{5} \pi$

0.5 \Rightarrow Entonces $2\pi \left[\frac{1}{m+2} + 2 \right] = \frac{22}{5} \pi \Rightarrow \frac{1}{m+2} + 2 = \frac{11}{5} \Rightarrow \frac{1}{m+2} = \frac{11}{5} - 2 = \frac{1}{5} \Rightarrow m+2 = 5 \Rightarrow m=3 //$